ÚLOHA 11 GEOGEBRA 590 364 Materiál nabízí uživateli pracovní prostředí Nákresny programu **GeoGebra** pro samostatné řešení úlohy. Výsledek v něm ale není dostupný. Materiál je tak vhodný pro společné i individuální řešení úlohy a pro společnou diskusi jednotlivých kroků tohoto řešení.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál je tvořen prostředím Nákresny s nabídkou nástrojů omezenou jenom na ty potřebné, a pod Nákresnou uvedeným Algebraickým oknem, do jehož vstupního pole můžeme zapisovat další body. Prostředí je určeno pro postupné zaznamenávání jednotlivých kroků řešení úkolu. K tomu je potřebná znalost pouze několika úkonů v programu **GeoGebra**, konkrétně se jedná o zápis bodu do vstupního řádku, případně jeho umístění do nákresny myší, nastavení parametrů bodu, sestrojení úsečky a zápis součtu souřadnic daných bodů.

Pro úvodní seznámení se základy obsluhy programu lze doporučit *Návody k aplikaci GeoGebra Classic* na adrese https://www.geogebra.org/m/zwbyag58.

Při práci s online appletem je třeba mít na paměti, že se v něm zakreslené řešení neuchovává. Pro potřeby zachování žákovských řešení je vhodné použít prostředí **GeoGebra** Classroom. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Optimální zobrazení appletu, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím , které se objeví na jeho místě.

Box UČ ▸ s. 147 590 365

Pracovní list, Pravoúhelníky

Pracovní list lze použít pro práci ve dvojicích nebo trojicích.

Výsledky úlohy:

b) kolmost sousedních a rovnoběžnost protějších stran pravoúhelníku, shodnost sousedních stran ve čtverci

c) 4 056 mm^2

d) $7\frac{4}{5} : 5{,}2 = 3 : 2$, rozměry narýsovaného návrhu praporu třídy jsou proto ve stejném poměru jako rozměry české vlajky. Zobrazeny jsou africké vlajky v pořadí Guinea, Madagaskar, Sierra Leone.

Kosočtverec a kosodélník – kosoúhelníky

UČ ▸ s. 148–156

Úlohy

VSTUPNÍ ÚLOHA V řešení úkolu 1 jsme použili pojem „kosý úhel“, podle něhož jsou kosoúhelníky pojmenovány, ve smyslu úhel, který není pravý, je ostrý nebo tupý. Za kosý úhel se někdy považuje nenulový úhel, který není pravý, přímý ani plný, tj. připouští se i možnost, že kosý úhel je nekonvexní.

ÚLOHA 3 GEOGEBRA 590 366 K úloze je připravena jednak předloha pro případ, že by nebyl čas na rýsování. Navíc zde najdete materiál představující animaci postupu řešení úlohy. Obrázek je dynamický, je možné manipulovat s určujícími body úlohy, a tak měnit její vstupní konfiguraci.

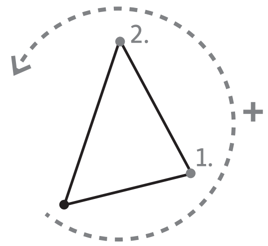
Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje konstrukci řešení daného úkolu. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek je dynamický. Je možné s ním interagovat prostřednictvím jeho dynamických prvků. Konkrétně se jedná o oranžově vybarvené krajní body dvou průměrů kružnice. Je možné s nimi manipulovat tažením myší, v případě dotykových zařízení prstem. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka , které se objeví na jeho místě.

ÚLOHA 5 **GEOGEBRA** 590 367 Materiál je určen pro řešení úlohy v digitálním prostředí Nákresny programu **GeoGebra** prostřednictvím manipulace s danými objekty.

Instrukce pro práci s materiálem: Řešitel má k dispozici interaktivní verzi obrázku z učebnice. Trojúhelníky je možné po pracovní ploše přemisťovat, vzájemně k sobě přikládat či překrývat. Každý z trojúhelníků lze po pracovní ploše posouvat i otáčet. Využíváme při tom dva oranžové vrcholy, jejichž role jsou dány jejich pořadím při procházení po obvodu trojúhelníku v kladném smyslu, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček. Prvním z dvojice oranžových vrcholů (zde znázorněny šedou barvou) je ten, který při tomto procházení následuje bezprostředně po černém vrcholu trojúhelníku, viz *obr. 4*.



obr. 4: Určení pořadí oranžových vrcholů

Posunutí celého trojúhelníku provedeme tažením myší, při uchopení jeho vnitřku nebo jeho prvního oranžově zbarveného vrcholu. Otočení, jehož středem je z konstrukčních důvodů první z oranžových vrcholů, provedeme tažením druhého z oranžových vrcholů. Obrázek je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka , které se objeví na jeho místě.

Souvislosti UČ ▸ s. 150

Pokud jsou pravítka stejně široká, vymodelují se pomocí nich kosočtverce a čtverec. Pomocí různě širokých pravítek nebo pravítka a proužku papíru jiné šířky než pravítko dostaneme kosodélníky a obdélník.

Úlohy a řešené příklady

ÚLOHA 7 Jako opakování týkající se úhlů lze nejprve zařadit otázky ano/ne, resp. tvrzení, o jejichž pravdivosti se má rozhodnout. Např.: Je vedlejší úhel k ostrému úhlu úhel tupý? Je v dvojici souhlasných úhlů jeden ostrý a druhý tupý? Je vedlejší úhel k pravému úhlu ostrý úhel? ...

Box UČ ▸ s. 150 590 368

Pracovní list, Kosodélník

V tomto pracovním listu se pracuje s vlastnostmi vnitřních úhlů kosodélníku. Předpokládá se, že úhly jsou pojmenovány proti směru hodinových ručiček v pořadí α, β, γ, δ.

Výsledky (vypracování) úlohy:

a) Úhel α a γ jsou protější úhly. Také úhly β a δ jsou protější úhly.

b) Přiložením protějších úhlů na sebe jsem zjistil(a), že jsou shodné.

c) Sestavím-li zpět obdélník, tvoří protější úhly dvojice střídavých úhlů. Tím je potvrzeno, že protější úhly jsou shodné a mají stejnou velikost.

d) Úhly α a β jsou sousední úhly. Také dvojice úhlů β, γ a γ, δ a α, δ jsou sousední úhly.

e) Ve dvojici sousedních úhlů je jeden úhel ostrý a druhý tupý.

f) Součet dvou sousedních úhlů je roven přímému úhlu.

g) Vnitřní úhel kosodélníku nemůže být pravý.

h) Součet všech vnitřních úhlů kosodélníku je větší než přímý úhel, je roven 360°.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1 **GEOGEBRA** 590 369

Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 5$ cm
2. $\sphericalangle LKX$; $|\sphericalangle LKX| = 55°$
3. n; $n(K; 3{,}5 \text{ cm})$
4. N; $N \in \mapsto KX \cap n$
5. $\triangle KLN$
6. p; $p \parallel KL$, $N \in p$
7. q; $q \parallel KN$, $L \in q$
8. M; $M \in p \cap q$
9. kosodélník $KLMN$

K příkladu je také připraven materiál v programu **GeoGebra** ilustrující formou animace konstrukci kosodélníku.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje postup sestrojení kosodélníku dle daného zadání. Jedná se o animaci řešení popsaného v učebnici. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek není dynamický. Body *K*, *L* jsou pevně přichyceny k nákresně. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka , které se objeví na jeho místě.

Shrnutí

UČ ▸ s. 152

Výškou kosoúhelníku je vedle vzdálenosti dvou rovnoběžek také úsečka, jejímiž krajními body jsou paty kolmice vedené k protějším stranám kosoúhelníku. Protože obvod čtyřúhelníku (pravoúhelníku) je podle textu v učebnici na str. 143 číslo, tak i v případě výšky je potlačeno pojetí výšky jako geometrického útvaru a je upřednostněno její pojetí jako čísla.

Řešené příklady

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2 **GEOGEBRA** 590 370

2 b) Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 4{,}8$ cm
2. $\sphericalangle KLY$; $|\sphericalangle KLY| = 70°$
3. p; $p \parallel KL$, $v(K, p) = 3{,}5$ cm
4. M; $M \in \mapsto LY \cap p$
5. q; $q \parallel LM$, $K \in q$
6. N; $N \in p \cap q$
7. kosodélník $KLMN$

K příkladu 2 b) je také připraven materiál ilustrující formou animace konstrukci kosoúhelníku. Varianta a) zadání tohoto příkladu nemá řešení.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje postup sestrojení kosoúhelníku dle daného zadání příkladu. Jedná se o animaci řešení popsaného v učebnici. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek není dynamický. Body *K*, *L* jsou pevně přichyceny k nákresně. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka , které se objeví na jeho místě.

Pozor! UČ ▸ s. 155

Z barevné nápovědy vyplývá, že obsah obdélníku opsaného kosočtverci je dvojnásobkem obsahu kosočtverce. Strany tohoto obdélníku jsou shodné s úhlopříčkami kosočtverce, proto pro obsah kosočtverce platí $S = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, kde *e*, *f* jsou úhlopříčky kosočtverce.

Úlohy

ÚLOHA 19 Čtverce a obdélníky nepovažujeme za kosoúhelníky. O pravdivosti daných tvrzení lze proto jednoznačně rozhodnout.

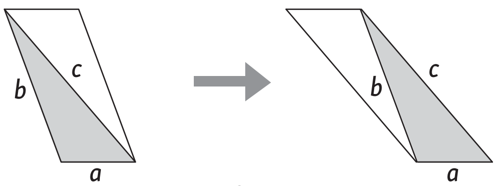
ÚLOHA 23 Hypotéza je tvrzení, o kterém se lze domnívat, že platí, a jehož platnost je žádoucí potvrdit nebo vyvrátit. Hypotézy, jejich dokazování spolu s definicemi, větami a axiomy tvoří podstatu matematické teorie.

Obsah trojúhelníku

UČ ▸ s. 157–159

Úlohy

VSTUPNÍ ÚLOHA Z obrázků je dobře vidět, že obsah trojúhelníku je poloviční oproti obsahu kosoúhelníku (pravoúhelníku) se stranami *a*, *b* a výškami v_a, v_b, takže vzorce $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$ a $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$ jsou zřejmé. Ke zdůvodnění výpočtu obsahu trojúhelníku pomocí třetí strany, $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$, bychom potřebovali předpis pro výpočet obsahu kosoúhelníku pomocí jeho úhlopříčky. Snazší je „přeskládat“ trojúhelníky, které tvoří kosoúhelník (pravoúhelník) se stranami *a*, *b* na kosoúhelník či pravoúhelník se stejným obsahem a stranami *a*, *c* (viz *obr. 5*), nebo stranami *b*, *c*.



obr. 5

ÚLOHA 1 Strany a výšky trojúhelníků mají následující velikosti. (Je uvedena velikost výšky na stranu, jejíž délka je podtržená.)

(1) $\underline{42}$ mm, 45 mm, 39 mm, $v = 36$ mm; (2) 30 mm, 51 mm, $\underline{63}$ mm, $v = 24$ mm; (3) 42 mm, 40 mm, $\underline{58}$ mm, $v = 29$ mm; $S_1 = S_2 = 756\ \text{mm}^2$, $S_3 = 840\ \text{mm}^2$; $o_1 = 126$ mm, $o_2 = 144$ mm, $o_3 = 140$ mm